

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Лапин Егор Дмитриевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Параметрический анализ модели
эндогенного роста Лукаса**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Смирнов Н. В.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

1	Введение. Обзор литературы	3
1.1	Принцип максимума Понтрягина	5
1.2	Численный метод Рунге-Кутты	10
1.3	Модель эндогенного роста Лукаса	12
2	Параметрический анализ модели Лукаса	15
2.1	Постановка задачи параметрического анализа	15
2.2	Параметрический анализ модели Лукаса	16
2.3	Численное моделирование	18
2.4	Анализ результатов	22
	Заключение	23
	Список литературы	26
	Приложение	27

1 Введение. Обзор литературы

Теория оптимального управления была разработана в связи с необходимостью решать различные задачи, в которых имеются ограничения ресурсов: топлива, времени, энергии, финансов. Под оптимальностью, в данном случае, подразумевается максимизация или минимизация некоторых свойств объекта, поиск наиболее выгодного управления системой.

Для задач оптимального управления применяются различные динамические модели, математически описывающие поведение системы. Примерами могут служить: системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы дифференциальных уравнений в частных производных, системы разностных уравнений. Данное направление активно развивалось в середине XX века. Известным достижением стало динамическое программирование, разработанное Р. Белманом [1]. Большой вклад в теорию внесли такие ученые как: В. И. Зубов [2], Р. Э. Калман [3], Р. Ф. Габасов [4], Л. С. Понтрягин. Последний вывел принцип максимума [5], являющийся необходимым условием оптимальности управления. Также теория оптимального управления нашла свое применение и в экономике, например, в модели экономического роста Р. Солоу [6].

Настоящая работа основывается на модели эндогенного

роста, разработанной Р. Лукасом [7], в которой производится анализ параметров с помощью принципа максимума. Задача состоит в том, чтобы исследовать поведение модели при различных параметрах и рассмотреть ее управления вне равновесных траекторий. В ходе решения получены системы дифференциальных уравнений относительно управляемых величин, аналитическое решение которых не представляется возможным. Для решения этой проблемы используются численные методы Рунге-Кутты.

1.1 Принцип максимума Понтрягина

Задача оптимального управления

Пусть дана управляемая система

$$\dot{x} = f(x, u),$$

где $u \in \Omega \subset R^m$, $x \in R^n$.

Допустим, что существует такое управление $u = u(t)$, которое переводит фазовое состояние x_0 в фазовое состояние x_1 . Это значит, что существуют два таких значения времени $t_0 < t_1$, что решение уравнения

$$\dot{x} = f(x, u(t))$$

удовлетворяет условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Задача заключается в том, чтобы выбрать такое наиболее выгодное управление $u \in \Omega$, которое также переводит фазовую точку x_0 в фазовую точку x_1 . Для этого введем функционал L , описывающий качество управления $u(t)$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt,$$

где $f^0(x, u) = f^0(x^1(t), \dots, x^n(t), u(t))$, будем считать, что чем меньше этот функционал, тем более выбранное управление выгодно.

Формулировка принципа максимума Понтрягина

Включим фазовое пространство R^n в $n + 1$ мерное пространство S^{n+1} , присоединив к координатам x^1, \dots, x^n координату x^0 .

Вектор пространства S^{n+1} будем обозначать

$$\tilde{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n).$$

Также рассмотрим вектор

$$\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$$

и вспомогательную функцию

$$H(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u) = \psi_\alpha f^\alpha(\tilde{x}, u), \quad \alpha = 0, 1, \dots, n,$$

двух $(n + 1)$ - векторов \tilde{x} , $\tilde{\psi}$ и точки u множества Ω .

Теорема 1.1. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{aligned} c\dot{x}^i &= \frac{\partial H(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u)}{\partial \psi_i} \\ \dot{\psi}_i &= -\frac{\partial H(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u)}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Система содержит $2(n + 1)$ уравнений. Тогда, для того чтобы управление $u(t)$ было оптимальным при заданном функционале L , необходимо, чтобы существовала ненулевая векторная функция $\tilde{\psi}(t)$, удовлетворяющая данной системе и, кроме того, чтобы для любого t из отрезка $t_0 \leq t \leq t_1$ и для любой точки $v \in \Omega$ выполнялось неравенство

$$H(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) \geq H(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), v).$$

Применения принципа максимума

Принцип максимума Понтрягина имеет очень широкий круг приложения: механика, экономика, экология. Он применяется в тех случаях, когда важно найти оптимальное управление из доступного множества. Ниже представлен алгоритм применения принципа для задачи из механики [5].

Пример. Пусть по прямой движется точка. Задача состоит в том, чтобы наискорейшим образом остановить движение этой точки в заданном месте прямой, которое мы примем за начало координат, применением к ней силы, ограниченной по модулю. В виде дифференциальных уравнений движение точки будет описано следующим образом:

$$\ddot{x} = u, \quad |u| < 1.$$

В фазовых координатах $x^1 = x$, $x^2 = \frac{dx}{dt}$ уравнение имеет вид следующей системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 \\ \dot{x}^2 &= u. \end{aligned} \tag{1}$$

Далее строим Гамильтониан

$$H = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 u,$$

откуда, используя уравнения Эйлера – Лагранжа, получаем:

$$\lambda_1 = c_1,$$

$$\lambda_2 = c_2 - c_1 t.$$

После, с учетом $\lambda_2 u = (c_2 - c_1 t)u$ имеем:

$$u(t) = \text{sign}(c_2 - c_1 t).$$

Из этого следует, что оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ± 1 и имеющей не более двух интервалов постоянства.

Для отрезка времени, для которого $u \equiv 1$, в силу системы (1) имеем:

$$\dot{x}^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + s,$$

где s – константа. Таким образом, кусок фазовой траектории, представляет дугу параболы, по которой фазовые точки движутся снизу вверх, так как $\frac{dx^2}{dt} = u = +1$.

Аналогично для отрезка времени, где $u \equiv -1$, имеем:

$$\dot{x}^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + r,$$

где r – константа. Но на этой параболе фазовые точки движутся сверху вниз, так как $\frac{dx^2}{dt} = u = -1$.

На рисунке 1 изображено все семейство полученных таким образом фазовых траекторий. На плоскости выделена линия переключения – АОВ. Выше этой линии управление $u = -1$, а ниже $u = +1$.

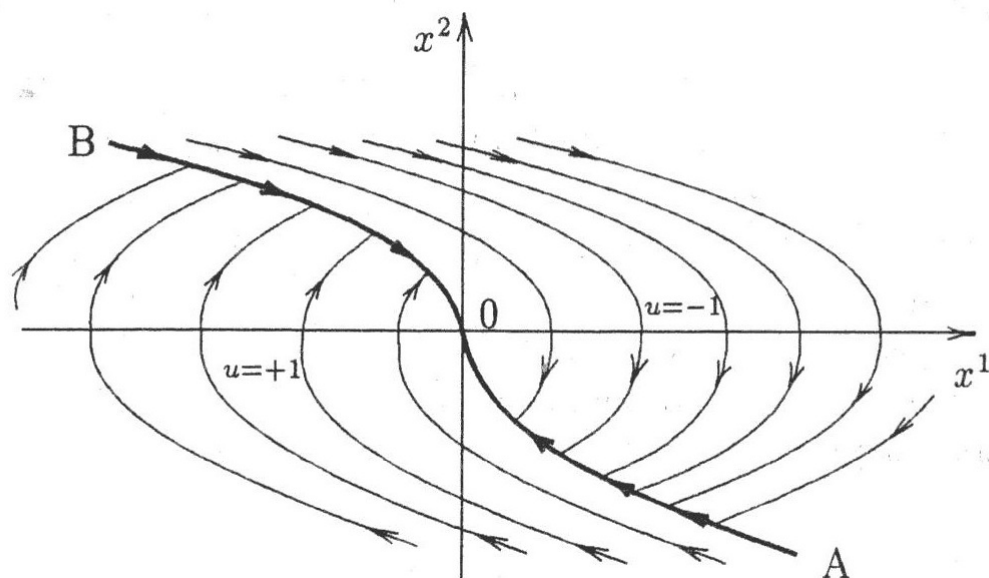


Рис. 1: Фазовый портрет с линией переключения управления.

Таким образом, если начальное положение расположено выше линии AOB , то фазовая точка должна двигаться под воздействием управления $u = -1$ до тех пор, пока она не попадет на дугу AO ; в момент попадания на дугу AO значение u переключается и становится равным $+1$ вплоть до момента попадания в начало координат. Если же начальное положение расположено ниже линии AOB , то u должно быть равным $+1$ до момента попадания на дугу BO , а в момент попадания на дугу BO значение u переключается и становится равным -1 .

1.2 Численный метод Рунге-Кутты

Постановка задачи

Пусть в области $D = a \leq x \leq b, |y^i - y_0^i| \leq b_i \in R^{n+1}$ определена функция

$$f(x, y) \equiv f(x, y^1, \dots, y^n), \quad (x, y) \in D.$$

Необходимо найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (2)$$

Вычисление нового значения происходит в 4 стадии:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

То есть первым делом задаются начальное значение и шаг метода, далее вычисляются промежуточные значения коэффициентов. После чего вычисляется значение в следующей точке по формуле (2). Полученное значение принимается за начальное, вновь задается шаг, и алгоритм повторяется необходимое количество раз [8].

1.3 Модель эндогенного роста Лукаса

Будем использовать экономическую модель из работы [7] с идентичными рациональными работниками, динамика численности которых описывается формулой:

$$\dot{N} = N(t)\lambda. \quad (3)$$

Пусть $h(t)$ – функция человеческого капитала репрезентативного работника, то есть уровень его знаний и умений, $u(t)$ – некоторая доля его рабочего времени, посвященная производству благ, $1 - u(t)$ – доля времени, посвященная накоплению человеческого капитала. Предполагается, что рост человеческого капитала определен уравнением:

$$\dot{h} = \delta(1 - u(t))h. \quad (4)$$

Накопление физического капитала $K(t)$ имеет естественную для неоклассической экономической модели форму:

$$\dot{K} = Y(t) - N(t)c(t), \quad (5)$$

где $Y(t)$ – выпуск, $c(t)$ – поток реального потребления на душу населения. $Y(t)$ задан производственной функцией Кобба-Дугласа:

$$Y(t) = AK^\beta(uhN)^{1-\beta}h_\alpha^\gamma, \quad (6)$$

где $N(t) \geq 0$, $h(t) \geq 0$, $h_\alpha \geq 0$, $c(t) \geq 0$, $K(t) \geq 0$, $0 \leq u(t) \leq 1$. A – уровень технологий, γ – эластичность выпуска по челове-

ческому капиталу, β – эластичность выпуска по физическому капиталу считаются постоянными. На них накладываются следующие естественные ограничения:

$$\delta > 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \gamma > 0, \quad N(0) = 1.$$

Предпочтения определяются нормой дисконтирования $\rho > 0$ и коэффициентом относительной несклонности к риску $\sigma > 0$. При этом задан целевой функционал:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1-\sigma} [c(t)^{1-\sigma} - 1] N(t) e^{-\rho t} dt, \quad (7)$$

который надо максимизировать. Данный функционал определяет зависимость рискованности работников и размеров потребления на душу населения.

Принята гипотеза о том, что при максимизации функционала (7) при заданных условиях (3) – (6) работник считает переменным собственным человеческий капитал $h(t)$. При этом средний для экономики человеческий капитал $h_\alpha(t)$ полагается экзогенно заданным. По каждой функции $h(t)_\alpha$ можно найти набор функций:

$$h(t, h_\alpha(t)), \quad K(t, h_\alpha(t)), \quad c(t, h_\alpha(t)), \quad u(t, h_\alpha(t)),$$

максимизирующий функционал (7) при заданных ограничениях. Если при этом выполняется $h(t) = h_\alpha(t)$, то данный набор

называется равновесной траекторией.

2 Параметрический анализ модели Лукаса

2.1 Постановка задачи параметрического анализа

В работах [9], [10] была решена задача оптимального управления рабочим временем и обучением репрезентативного работника при условии равновесных траекторий, на которых также выполнялось $\sigma = \beta$. Задача этой же работы заключается в изучении поведения модели эндогенного роста Лукаса и поиска оптимального управления на равновесных траекториях, но при выполнении $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\beta} + \varepsilon$, где ε величина неравномерности.

2.2 Параметрический анализ модели Лукаса

Применение принципа максимума

Считая функцию $h_\alpha(t)$ экзогенно заданной и применяя к выше описанной модели принцип максимума Понтрягина с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H(K, h, \lambda_1, \lambda_2, c, u) = \\ = \frac{1}{1 - \sigma} [c^{1-\sigma} - 1]N + \lambda_1 [AK^\beta (uhN)^{1-\beta} h_\alpha - Nc] + \lambda_2 \sigma (1 - u)h, \end{aligned}$$

где λ_1 и λ_2 двойственные переменные для переменных состояния $K(t)$ и $h(t)$ соответственно, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} c^{-\sigma} &= \lambda_1, \\ \lambda_1(1 - \beta)AK^\beta (uNh)^{-\beta} Nh^{1+\gamma} &= \lambda_2 \delta h, \\ \dot{\lambda}_1 &= \rho \lambda_1 - \lambda_1 \beta AK^{\beta-1} (uNh)^{1-\beta} h_\alpha^\gamma, \\ \dot{\lambda}_2 &= \rho \lambda_2 - \lambda_1(1 - \beta)AK^\beta (uN)^{1-\beta} h^{-\beta} h_\alpha^\gamma - \lambda_2 \delta (1 - u). \end{aligned} \tag{8}$$

Граничные условия включают в себя начальные условия $K(0) = K_0$, $h(0) = h_0$ и условия трансверсальности:

$$\lambda_1 K e^{-\rho t} \longrightarrow 0 \text{ и } \lambda_2 h e^{-\rho t} \longrightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

В [10] для частного случая $\beta = \sigma$ для равновесных траекторий было получено дифференциальное уравнение относительно управляемой функции $u(t)$:

$$\dot{u} = \frac{u}{\beta} [\lambda + (1 + \gamma - \beta)\delta - \rho] - \frac{(\gamma - \beta)\delta}{\beta} u^2.$$

Также в [9], [10] были доказаны леммы, накладывающие условия на параметры, чтобы управление не выходило за рамки допустимых значений. Ниже представлены эти ограничения:

$$\gamma > \beta,$$

$$\delta \leq \rho - \lambda < \delta(1 + \gamma - \beta).$$

Параметрический анализ

Далее рассмотрим случай, когда нет равенства между параметрами β и σ , но их значения отличаются на некоторую малую величину ε . Варьируются обратные величины для простоты выкладок, то есть $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\beta} + \varepsilon$.

Применение принципа максимума Понтрягина в данном случае дало более сложную систему:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}}{u} &= \varepsilon \beta A K^{\beta-1} (uN)^{1-\beta} h^{1+\gamma-\beta} - \omega, \\ \dot{N} &= N(t)\lambda, \\ \dot{h} &= \delta(1 - u(t))h(t), \\ \dot{K} &= Y(t) - N(t)c(t), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\text{где } \omega = \varepsilon \rho + \frac{\lambda}{\beta} + \frac{(\gamma - \beta)\delta(1 - u)}{\beta} - \frac{\rho - \delta}{\beta}.$$

Для решения этой системы будем использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка с расчетной схемой, построенный по правилу одной шестой.

И на примере нескольких конкретных систем, в случаях когда $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \neq 0$ были получены следующие результаты:

2.3 Численное моделирование

Для интегрирования системы (9) была написана программа, основанная на численном методе Рунге-Кутты четвертого порядка с расчетной схемой, построенной по правилу одной шестой. Программа была протестирована при различных $\varepsilon \neq 0$.

Для коэффициентов системы (9) были приняты следующие модельные значения:

$$\lambda = 0,035, \quad \beta = 0,21, \quad \gamma = 0,6, \quad \delta = 0,03, \quad A = 1.$$

Кроме того, были заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0,666, \\ N(0) &= 600, \\ h(0) &= 10, \\ K(0) &= 1500. \end{aligned} \tag{10}$$

На рисунках 2 – 4 представлены графические результаты изменения управляемой величины u при различных ε .

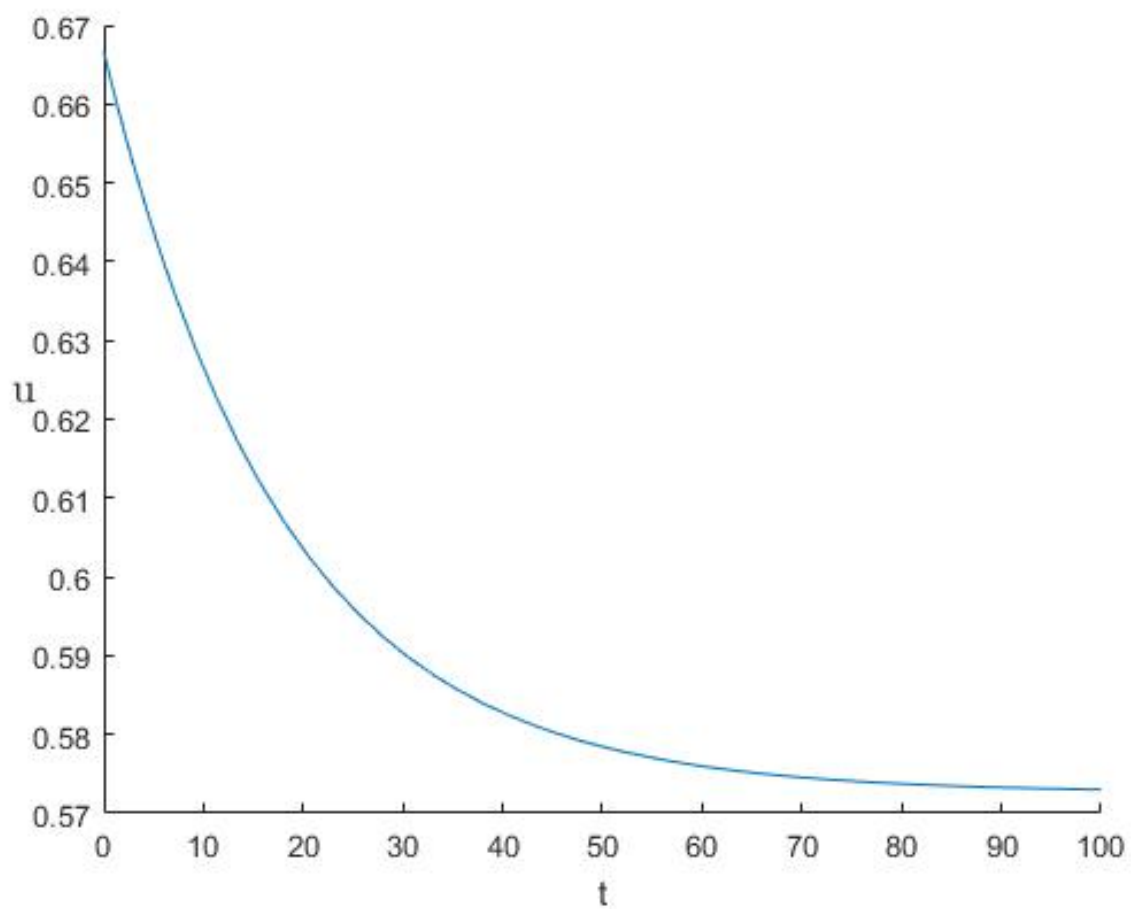


Рис. 2: График изменения управления при $\varepsilon = 0$.

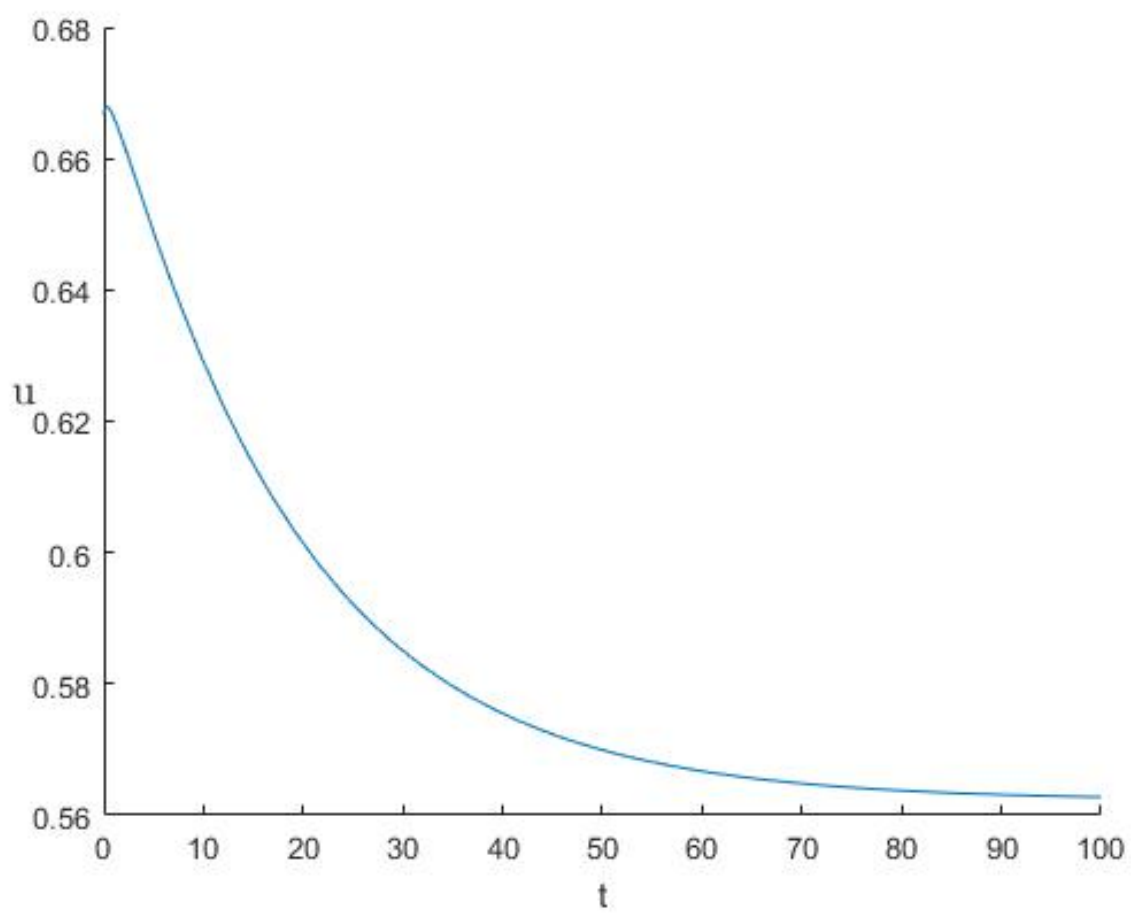


Рис. 3: График изменения управления при $\varepsilon = 0.01$.

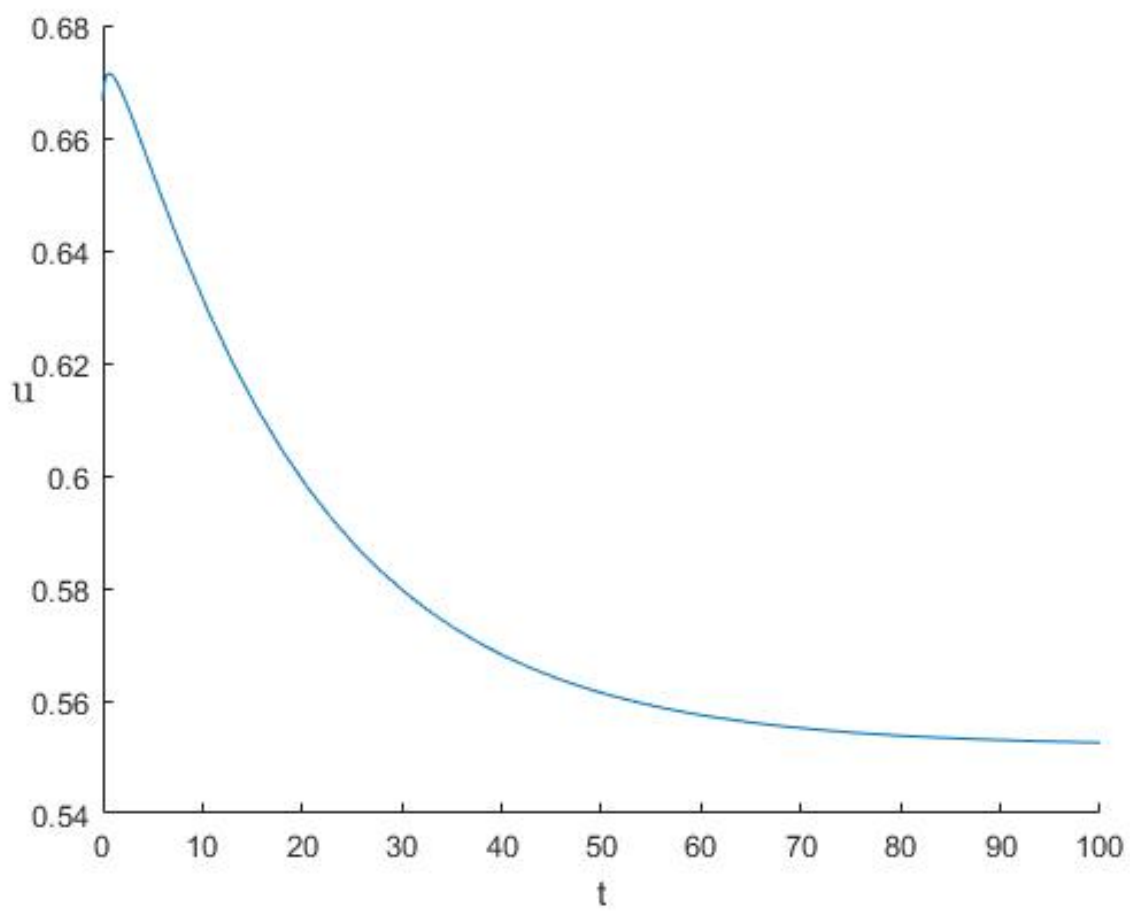


Рис. 4: График изменения управления при $\varepsilon = 0.02$.

2.4 Анализ результатов

На рисунках 2—4 видно, что управляемая величина при различных вариациях ε имеет одинаковый переходный период выхода на определенное постоянное значение. При этом предельные значения u отличаются не более чем на $2 * 10^{-3}$. Это позволяет сделать вывод, что случай неравенства σ и β при мере неравномерности ε расширяет модель рассмотренную в [10].

Заключение

В данной работе рассмотрен метод поиска оптимального управления в виде кусочно-непрерывной функции. Этот метод применялся для экономической модели эндогенного роста Лукаса.

Отметим основные результаты работы:

1. Проведен анализ модели эндогенного роста Лукаса и соответствующей задачи оптимального управления.
2. С целью математического моделирования изучен принцип максимума Понтрягина и метод численного интегрирования Рунге-Кутты.
3. Предложено расширение модели Лукаса в плане множества допустимых значений основных параметров.
4. Проведено численное моделирование задачи параметрического анализа модели Лукаса.
5. Для модифицированной модели Лукаса разработана компьютерная программа, которая позволяет численно находить оптимальное управление для каждого набора параметров.
6. Программа протестирована на модельных примерах.

7. Основные результаты работы докладывались на XLVIII международную конференцию аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость".

Список литературы

- [1] Беллман Р. Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М.: ИЛ, 1962. стр. 336.
- [2] Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974. стр. 336.
- [3] Об общей теории систем управления. Труды I Международ. Конгресса ИФАК. 1961. Т.2. стр. 521-547.
- [4] Габасов Р. Ф. Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. Минск: Изд-во Бело-русского гос. университета, 1975 стр. 280
- [5] Понтрягин Л.С. Принцип максимума, 1998, стр.5- 36.
- [6] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория, 1975, стр 414-429; 469-505.
- [7] Lucas R.E. On the mechanics of economic development // J. Monetary Econom. 1988. v. 22. №1. p. 18-31.
- [8] Олемской И.В. Методические указания по вычислительному практикуму.
<http://www.apmath.spbu.ru/ru/structure/depts/is/task7.pdf>.

- [9] Матвеев В.Д. и Королев А.В. Управление в социально-экономических системах, 2006, стр. 126-136.
- [10] Xie D. Divergence in economic performance: transitional dynamics with multiple equilibria // J.Econom. Theory. 1994. v. 63. №1. p. 97-112.
- [11] Галеев Э.М. Тихомиров В. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи, 2000, стр.186-194.

Приложение

Листинг программы численного метода Рунге-Кутты

При $\sigma = \beta$

Дополнительные переменные

```
z=(1+(1+j-b)*delta-p)/b;
```

```
a=(j-b)*delta/b;
```

```
ux=u0;
```

```
uxz=[ux];
```

Блок вычисления промежуточных значений

```
for i=1:1:50
```

```
k1=h*(ux*z-a*ux*ux);
```

```
k2=h*(z*(ux+k1/2)-a*(ux+k1/2)^2);
```

```
k3=h*(z*(ux+k2/2)-a*(ux+k2/2)^2);
```

```
k4=h*(z*(ux+k3)-a*(ux+k3)^2);
```

Вычисление функции и построение графика

```
ux=ux+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
```

```
uxz=[uxz ux];
```

```
end
```

```
x=0:1:50;
```

$\text{plot}(x, uxz)$

При $\sigma \neq \beta$

Дополнительные переменные

$N = \exp(l * t);$

$k1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0];$

$k2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0];$

$k3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0];$

$k4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0];$

$h0 = 5;$

$h1 = 13;$

$K0 = 10;$

$y = [N \ h0 \ K0 \ u0];$

$u = u0;$

$K = K0;$

$h1 = h0;$

$A = 1;$

$c = 2;$

$z = (p - \text{delta}) / b;$

$g = \text{delta} * (j - b) / b;$

$y_{xz} = [y(4)]$

Блок вычисления промежуточных значений

$$k1(2)=h*\delta*(1-y(4))*y(2);$$

$$k1(3)=h*((A*y(3)^b)*(y(4)*y(2)*y(1))^{(1-b)}*(h_1^j)-y(1)*c);$$

$$k1(4)=h*y(4)*(eps*b*A*(y(3)^{b-1})*(y(4)*y(1))^{(1-b)}*(y(2))^{(1-b+j)}-eps*p+1/b+g*(1-y(4))-z);$$

$$k2(2)=h*\delta*(1-(y(4)+k1(4)/2))*y(2)+k1(2)/2);$$

$$k2(3)=h*((A*(y(3)+k1(3)/2)^b)*((y(4)+k1(4)/2)*(y(2)+k1(2)/2)*y(1))^{(1-b)}*(h_1^j)-y(1)*c);$$

$$k2(4)=h*(y(4)+k1(4)/2)*eps*b*A*((y(3)+k1(3)/2)^{b-1})*((y(4)+k1(4)/2)*y(1))^{(1-b)}*((y(2)+k1(2)/2))^{(1-b+j)}-eps*p+1/b+g*(1-(y(4)+k1(4)/2))-z);$$

$$k3(2)=h*\delta*(1-(y(4)+k2(4)/2))*y(2)+k2(2)/2);$$

$$k3(3)=h*((A*(y(3)+k2(3)/2)^b)*((y(4)+k2(4)/2)*(y(2)+k2(2)/2)*y(1))^{(1-b)}*(h_1^j)-y(1)*c);$$

```

k3(4)=h*(y(4)+k2(4)/2)*
*(eps*b*A*((y(3)+k2(3)/2)^(b-1))*
*((y(4)+k2(4)/2)*y(1))^(1-b)*
*((y(2)+k2(2)/2))^(1-b+j)-eps*p+
+1/b+g*(1-(y(4)+k2(4)/2))-z);
k4(2)=h*delta*(1-(y(4)+k3(4)))*
*(y(2)+k3(2));
k4(3)=h*((A*(y(3)+k3(3))^b)*
*((y(4)+k3(4))*(y(2)+k3(2))*
*y(1))^(1-b)*(hl^j)-y(1)*c);
k4(4)=h*(y(4)+k3(4))*
*(eps*b*A*((y(3)+k3(3))^(b-1))*
*((y(4)+k3(4))*y(1))^(1-b)*((y(2)+k3(2)))^(1-b+j)-
-eps*p+1/b+g*(1-(y(4)+k3(4)))-z);

```

Вычисление функции и построение графика

```

t=t+h;
y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
y(1)=exp(l*t);
yxz=[yxz y(4)]
end
x=0:1:50;

```

`plot(x, yxz)`